数理解析研究所講究録
909巻 1995年 208-211

$SU(2,2)$ 上の theta 関数

広島大 理　松本 圭司 (Keiji Matsumoto)

Jacobi's theta constants は、

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(w)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\exp\{\pi i(n+a)^2w+2\pi inb\},\quad w\in\mathbf{H},\ a,b\in\{0,1/2\}$$

で定義され、$ab=0$ ならば $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(w)$ は $w\in\mathbf{H}$ で零点をもたないこと、$SL(2,\mathbf{Z})$ の level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ の元 $g=(g_{jk})$ に対し

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(g\cdot w)^4=(g_{21}w+g_{22})^2\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(w)^4,\quad g\cdot w=(g_{11}w+g_{12})(g_{21}w+g_{22})^{-1}$$

をみたすこと、そして Jacobi's identity

$$\vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}(w)^4-\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(w)^4+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(w)^4=0 \tag{1}$$

をみたすことはよく知られている。これらのことから写像 $\vartheta:\mathbf{H}/\Gamma(2)\to\mathbf{P}^2$

$$\vartheta:\mathbf{H}/\Gamma(2)\ni w\mapsto[\vartheta\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}(w)^4,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(w)^4,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}(w)^4]\in\mathbf{P}^2$$

が well-defined であり、$Z=\{[t_0,t_1,t_2]\in\mathbf{P}^2\mid t_0-t_1+t_2=0\}-\{[0,1,1],[1,0,-1],[1,1,0]\}$ への同型写像であることが容易にわかる。

一方 $\mathbf{P}^1$ 上の順序づけられた相異なる四点の配置空間 $X(2,4)$ は、以下のような商集合で定義される

$$X(2,4)=GL(2,\mathbf{C})\backslash M(2,4)/\mathbf{C}^{*4},$$

$$M(2,4)=\left\{x=\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13}\end{pmatrix}\middle|\, x\langle jk\rangle=\det\begin{pmatrix} x_{0j} & x_{0k} \\ x_{1j} & x_{1k}\end{pmatrix}\neq 0\quad 0\le j<k\le 3\right\}$$

であり、

$$g\in GL(2,\mathbf{C}):x\mapsto gx,\quad (h_0,\dots,h_3)\in\mathbf{C}^{*4}:x\mapsto x\mathrm{diag}(h_0,\dots,h_3),$$

が $GL(2,\mathbf{C})$ と $\mathbf{C}^{*4}$ の作用である。$M(2,4)$ の任意の元 x は $GL(2,\mathbf{C})$ と $\mathbf{C}^{*4}$ の作用で

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & z\end{pmatrix},\quad z\neq 0,1$$

という形にできるので、空間 $X(2,4)$ は $\mathbf{P}^1$ から三点 $\{0,1,\infty\}$ を除いたものとみることができるが、このみかたでは x の列のいれかえとしての対称群 S_4 の作用がわかりにくくなる。S_4 の作用がよくみえる形で $\mathbf{P}^2$ 内に実現することが以下のようにできる。写像 $\iota:M(2,4)\to\mathbf{P}^2$

$$\iota:M(2,4)\ni x\mapsto[x\langle 01\rangle x\langle 23\rangle,x\langle 02\rangle x\langle 13\rangle,x\langle 03\rangle x\langle 12\rangle]\in\mathbf{P}^2$$

は、$GL(2,\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^{*4}$ の作用で不変であるので写像 ι は $X(2,4)$ から $\mathbb{P}^2$ への写像と考えられる。この写像は、Plücker's relation

(2) $$x\langle 01\rangle x\langle 23\rangle - x\langle 02\rangle x\langle 13\rangle + x\langle 03\rangle x\langle 12\rangle = 0$$

および $x\langle jk\rangle \neq 0$ $(0 \leq j < k \leq 3)$ より

$$Z = \{[t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid t_0 - t_1 + t_2 = 0\} - \{[0,1,1],[1,0,-1],[1,1,0]\}$$

への同型写像であることが容易にわかる。

以上のことから $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ と $X(2,4)$ とが同型であることがわかるが、$X(2,4)$ から $\mathbb{H}/\Gamma(2)$ への対応は、$\mathbb{P}^1$ 上の与えられた四点の配置で分岐する $\mathbb{P}^1$ の double cover で楕円曲線を作り、その楕円曲線の周期の比をとる周期写像で与えられる。周期写像は多価であるがそのモノドロミー群が丁度 $\Gamma(2)$ となっている。

上半空間 $\mathbb{H}$ を

$$\mathbb{H}_2 = \left\{ W \in GL(2,\mathbb{C}) \mid \frac{W - W^*}{2i} > 0 \right\}$$

にかえた場合にも上記のようなきれいな対応があること紹介する。theta 関数を

$$\Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(W) = \sum_{n\in\mathbb{Z}[i]^2} \exp\{\pi i(n+a)^* W(n+a) + 2\pi i \mathrm{Re}(b^* n)\}, \quad W \in \mathbb{H}_2,\ a,b \in \{0, 1/(1+i)\}^2$$

で定義する。$a^*b \in \mathbb{Z}$ となる 10 個の $\Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(W)$ は恒等的に零ではなく、$\Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}({}^tW) = \Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(W)$ をみたし

$$\Gamma(1+i) = \left\{ g \in GL(4,\mathbb{Z}[i]) \mid g^* J g = J = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O \end{pmatrix},\ g \equiv I_4 \bmod 1+i \right\}$$

の元 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ に対し

$$\Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(g\cdot W)^2 = \det(g)\det(CW+D)^2\,\Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(W)^2, \quad g\cdot W = (AW+B)(CW+D)^{-1},$$

をみたす。そして以下の Jacobi's identity に対応する関係式をみたす。

(3) $$\sum_{\substack{a,b\in\{0,1/(1+i)\}^2 \\ a^*b\in\mathbb{Z}}} \Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(W)^2 \exp\{2\pi i(d^*a + c^*b)\} = 0$$

ここで c,d は $\{0,1/(1+i)\}^2$ の元で $c^*d \notin \mathbf{Z}$ となるもので6通りあるが、このうち独立な関係式は5個である。これらのことから $\Gamma(1+i)$ と transpose operator とで生成される群を $\langle \Gamma(1+i),{}^t \rangle$ とすると、写像 $\Theta : \mathsf{H}_2/\langle \Gamma(1+i),{}^t \rangle \to \mathsf{P}^9$

$$\Theta : \mathsf{H}_2/\langle \Gamma(1+i),{}^t \rangle \ni W \mapsto [\ldots, \Theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(W)^2, \ldots] \in \mathsf{P}^2$$

が well-defined であり、しかも $H_2/\langle \Gamma(1+i),{}^t \rangle$ をうまく compact 化したものと P^9 内の (3) の式で定まる空間 Y ($\simeq \mathsf{P}^4$) との同型写像となっている。

一方 P^2 上の順序づけられた一般の位置にある六本の直線の配置空間 $X(3,6)$ は、以下のような商集合で定義される

$$X(3,6) = GL(3,\mathsf{C})\backslash M(3,6)/\mathsf{C}^{*6},$$

$$M(3,6) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{00} & \cdots & x_{05} \\ x_{10} & \cdots & x_{15} \\ x_{20} & \cdots & x_{25} \end{pmatrix} \middle| x\langle jkl \rangle = \begin{vmatrix} x_{0j} & x_{0k} & x_{0l} \\ x_{1j} & x_{1k} & x_{1l} \\ x_{2j} & x_{2k} & x_{2l} \end{vmatrix} \neq 0 \quad 0 \le j < k < l \le 5 \right\}.$$

であり、

$$g \in GL(3,\mathsf{C}) : x \mapsto gx, \quad (h_0,\ldots,h_5) \in \mathsf{C}^{*6} : x \mapsto x\mathrm{diag}(h_0,\ldots,h_5),$$

が $GL(3,\mathsf{C})$ と C^{*6} の作用である。$X(3,6)$ を S_6 の作用がよくみえる形で P^9 内に実現することが以下のようにできる。写像 $\iota : M(3,6) \to \mathsf{P}^6$

$$\iota : M(3,6) \ni x \mapsto [\ldots, x\langle jkl \rangle x\langle pqr \rangle, \ldots] \in \mathsf{P}^9, \quad \{jkl\} \cup \{pqr\} = \{0,\ldots,5\}$$

は、$GL(3,\mathsf{C})$ と C^{*6} の作用で不変であるので写像 ι は $X(3,6)$ から P^9 への写像と考えられる。この写像は $X(3,6)$ と像 $\iota(X(3,6)) \subset \mathsf{P}^9$ との $2:1$ の写像であるが、像 $\iota(X(3,6))$ は、Plücker's relations で定まる P^9 内の P^4 と同型なところに含まれ、これが丁度 (3) がきめる空間 Y と一致する。つまり $X(3,6)$ が Y からいくつかの divisors を除いたものの double cover となっている。

$X(3,6)$ から $\mathsf{H}_2/\langle \Gamma(1+i),{}^t \rangle$ への対応は、P^2 上の与えられた六直線の配置で分岐する P^2 の double cover で K3 曲面を作り、その K3 曲面の周期の比をとる周期写像で与えられる。周期写像は多価関数であるがそのモノドロミー群が $\langle \Gamma(1+i),{}^t \rangle$ の index 2 の部分群となっている。

References.

[DO] Dolgachev I. and Ortland D., Points sets in projective spaces and theta functions, Astereisque **165**, (1988).

[Fr] Freitag E., Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Graußchen Zahlkörper, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. **1**, 1–49, (1967).

[Ig] Igusa J., On Siegel modular forms of genus two I, II, Am. J. Math. **84**, 175–200, (1962), **86**, 392–412, (1964).

[KS] Kuga M. and Satake I., Abelian varieties attached to polarized K_3-surfaces, Math. Ann. **169**, 239–242, (1967).

[MSY] Matsumoto K., Sasaki T. and Yoshida M., The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type $(3,6)$, Int. J. Math. **3**, 1–164, (1992).

[Ma] Matsumoto K., Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces, Math. Ann. **295**, 383–409, (1993).

[Mu] Mumford D., Tata lectures on theta I, II, Boston, Birkhäuser, 1983, 1984.